Chapitre 2 : Intégrales multiples.

1- Intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle:

1.1-Somme de Riemann :

Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ *à valeurs réelles.*

Soit la subdivision de R obtenus en partageant $[a,b]$ *en m intervalles égaux et* $[c,d]$ *en n intervalles égaux.*

Alors on définit l'intégrale de f sur R par :

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n} f(x_i,y_j)$$

1.2- Propriétés de l'intégrale double :

a. *Soit f et g deux fonctions continues sur R, on a :*

$$\iint_R \left(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right) dxdy$$

$$= \alpha \iint_R f(x,y)\,dxdy + \beta \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

b. *Si* $\forall (x,y) \in R:\ f(x,y) \leq g(x,y)$ *alors :*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \leq \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

c. $\left|\iint_R f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint_R |f(x,y)|\,dxdy$

d. Additivité par rapport au domaine

Etant donné $x_0 \in]a,b[$ *et* $y_0 \in]c,d[$ *on a :*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{[a,x_0]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy + \iint_{[x_0,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$$

Et

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,y_0]} f(x,y)\,dxdy + \iint_{[a,b]\times[y_0,d]} f(x,y)\,dxdy$$

1.3- Calcul de l'intégrale double d'une fonction continue:

1.3.1- Théorème de Fubini :

Si f est continue sur $R = [a,b]\times[c,d]$ *alors :*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

Ce théorème permet donc de calculer une intégrale double par deux intégrales simples successives.

Cas particulier :

Dans le cas ou f s'écrit de la forme $f(x,y) = g(x) * h(y)$ *avec g et h sont continues sur* $[a,b]$ *resp sur* $[c,d]$, *on a :*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right) * \left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$$

Exemple :

Calculons

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y+1}\,dxdy$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y+1}\,dy\right) dx = \int_0^1 [ln(x+y+1)]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \big(ln(x+2) - ln(x+1)\big)dx$$

$$= [(x+2)\,ln(x+2) - (x+2)]_0^1 - [(x+1)\,ln(x+1) - (x+1)]_0^1$$

$$= 3ln3 - 4ln2$$

2- Extension à une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$:

2.1- Définitions :

a- Soient A une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, f une fonction bornée de A dans $\mathbb{R}$ et $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle contenant A.

On dit que f est intégrable sur A si la fonction définie sur R par :

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \quad (x,y) \epsilon A \\ 0 & si \quad (x,y) \notin A \end{cases}$$

est intégrable sur R et l'on pose :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dxdy$$

b- Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite mesurable si la fonction caractéristique χ_A est intégrable sur tout rectangle contenant A .

On appelle « mesure de A » ou « l'aire de A » le réel

$$\mu(A) = \iint_A dxdy$$

2.2- Théorème de Fubini généralisé :

2.2.1- Proposition 1 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$A = \{(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 : \quad x \epsilon [a,b] \quad et \quad g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Où g et h sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que : $g \leq h$.

Si f est continue sur A, alors elle est intégrable sur A et :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

2.2.2- Proposition 2 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$A = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : \quad y\epsilon[c,d] \quad et \quad g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

Où g et h sont deux fonctions continues sur $[c,d]$ *telles que :* $g \leq h.$

Si f est continue sur A, alors elle est intégrable sur A et :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$$

Exemple :

Calculons l'aire d'un disque $D(O,R)$.

On sait que :

$$D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : \qquad x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$= \left\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : \quad -R \leq x \leq R \quad et \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq \mathrm{y} \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$$

On a donc :

$$\mu(D) = \iint_D dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\right) dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

En utilisant le changement de variables :

$x = Rsint$ où $t\epsilon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on trouve :

$$\mu(D) = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2t\,dt = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(1 + cos(2t)\big)dt$$

$$= R^2\left[t + \frac{sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2$$

D'où l'aire du disque $D(O,R)$ *est* $\mu(D) = \pi R^2$.

2.3- Additivité pâr rapport au domaine d'intégration :

Soit $A = A_1 \cup A_2$ *où* A_1 *et* A_2 *sont deux parties fermées bornées telles que :* $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$. *Alors :*

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dxdy$$

3- Changement de variables :

3.1- Théorème général :

Soit $f(x,y)$ *une fonction continue sur un domaine D fermé borné en bijection avec un domaine* Δ *fermé borné tels que :*

$$\forall(x,y)\epsilon D:\quad x = \varphi(u,v) \quad et \quad y = \psi(u,v) \qquad \text{où} \qquad (u,v)\epsilon\Delta$$

Et φ *et* ψ *sont de classe* C^1. *Alors :*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\; j(\varphi,\psi)(u,v)\;\; dudv$$

Où

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

3.2- Changement de variables affine :

3.2.1- Proposition :

Si : $x = \varphi(u,v) = x_0 + \alpha u + \beta v$

Et $y = \psi(u,v) = y_0 + \gamma u + \delta v$

Alors :

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta$$

Par suite:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)(\alpha\delta - \gamma\beta)\ dudv$$

3.2.2- Exemple :

Calculons $\iint_D xydxdy$ *où*

$D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1 \quad et \quad -1 \leq 2x - y \leq 2\}$ *est un parallélogramme.*

Posons : $u = x + y$ *et* $v = 2x - y$

On trouve donc :

$$x = \varphi(u,v) = \frac{1}{3}(u + v) \qquad et \qquad y = \psi(u,v) = \frac{1}{3}(2u - v)$$

Et le jacobien est :

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

Grâce à ce changement de variables, on va intégrer sur le rectangle :

$$\Delta = \{(u,v)\epsilon\mathbb{R}^2:\ 0 \le u \le 1 \quad et \quad -1 \le v \le 2\}$$

D'où :

$$\iint_D xydxdy = \iint_\Delta \frac{1}{9}(u+v)(2u-v)\left(-\frac{1}{3}\right) dudv$$

$$= -\frac{1}{27}\int_0^1 \left(\int_{-1}^2 (2u^2 + uv - v^2)dv\right) du$$

$$= -\frac{1}{27}\int_0^1 \left(6u^2 + \frac{3}{2}u - 3\right) du = -\frac{1}{27}\left[2u^3 + \frac{3}{4}u^2 - 3u\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{108}$$

3.3- Changement de variables en coordonnées polaires :

3.3.1- Proposition :

Soit f une fonction continue sur un domaine D fermé borné en bijection avec un domaine Δ fermé borné de $\mathbb{R}_+ \times [a, a+2\pi]$ *ou* $a\epsilon\mathbb{R}$ *et tels que :*

$$\forall (x,y)\epsilon D:\quad x = rcos\theta \quad et \quad y = rsin\theta \qquad \text{où} \qquad (r,\theta)\epsilon\Delta$$

Alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\ \,drd\theta$$

3.3.2- Exemple :

Soit $D = D(O,R)$ *et*

$$\Delta = \{(r,\theta):\ \ 0 \leq r \leq R \quad et \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

On a bien :

$$\forall (x,y) \epsilon D:\ \ x = r\cos\theta \ \ et \ \ y = r\sin\theta \quad \text{où} \quad (r,\theta)\epsilon\Delta$$

D'où,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\ \,dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta\right)rdr$$

En particulier, pour $f(x,y) = 1$ *on a :*

$$\iint_D dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\ \,dr\right)d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R rdr\right) = \pi R^2$$

C'est l'aire du disque D.

4- Calculs des Aires :

4.1- En coordonnées cartésiennes :

Exemple :

Calculons l'aire du domaine Δ délimité par les paraboles d'équations : $y = x^2$ *et* $y = \sqrt{x}$*:*

$$\Delta = \left\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1 \quad et \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$$

On a alors :

$$\mu(\Delta) = \iint_{\Delta} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right) dx$$

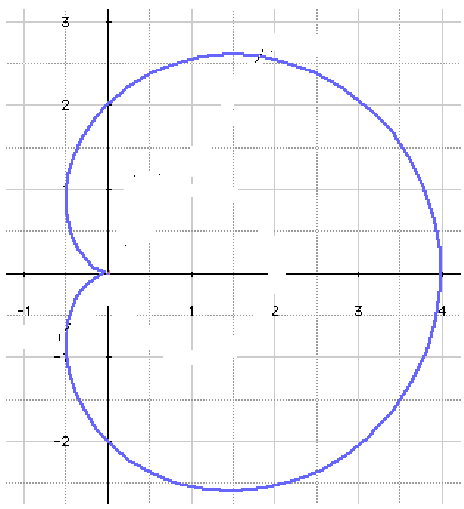
$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x}^3 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

4.2- En coordonnées polaires :

Exemple :

Calculons l'aire de l'intérieur d'une cardioïde définie par :

$$C = \{(r,\theta)\epsilon\mathbb{R}^2 : \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad et \quad 0 \leq r \leq a(1 + cos\theta)\}$$



On a :

$$\mu(C) = \iint_{C} rdrd\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{a(1+cos\theta)} rdr\right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2$$

5- Intégrales triples :

Dans cette section, nous généralisons les résultats précédents au cas des fonctions de trois variables.

5.1- Intégrale triple d'une fonction continue sur un pavé:

On appelle pavé, toute partie de $\mathbb{R}^3$ *de la forme :*

$$\mathrm{P} = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$$

De même que l'intégrale double, l'intégrale triple a les propriétés de linéarité, croissance et de l'additivité par rapport au domaine.

Grâce au théorème de Fubini, le calcul d'une intégrale triple peut se ramener à trois calculs d'intégrales simples.

Si φ *est une fonction continue sur* P, *on a :*

$$\iiint_{\mathrm{P}} \varphi(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^f \varphi(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

Exemple :

Calculons : $I = \iiint_{[0,1]^3} z\,cos(x + y)\;dx\,dy\,dz$

5.2- Extension à une partie bornée de $\mathbb{R}^3$:

De même, on définit les fonctions intégrables sur une partie bornée A *de* $\mathbb{R}^3$.

Une partie A est dite mesurable, si la fonction caractéristique χ_A *est intégrable sur A.*

On appelle mesure ou volume de A, le réel :

$$\mu(A) = \iiint_A dxdydz$$

Exemple :

Calculons le volume du tétraèdre A de sommets :

$O,\ P(a,0,0),\ Q(0,a,0)$ et $R(0,0,a)$

$$\mu(A) = \iiint_A dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{a-x} (a-x-y)\, dy \right) dx = \int_0^a \left[(a-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{a-x} dx$$

$$= \int_0^a \left((a-x)^2 - \frac{(a-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{6} [(a-x)^3]_0^a = \frac{a^3}{6}$$

5.3- Changement de variables :

5.3.1- Changement affine :

Soit φ *une application affine bijective de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *et A une partie bornée de* $\mathbb{R}^3$.

Si une fonction f est intégrable sur $\varphi(A)$ *alors* $f \circ \varphi$ *est intégrable sur A et l'on a :*

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_A f\circ\varphi(u,v,w)\,j_\varphi(u,v,w)\,dudvdw$$

Grâce à ce changement de variables, on peut calculer une intégrale triple sur un parallélépipède en se ramenant à une intégrale sur un pavé.

5.3.2- Changement de variables en coordonnées cylindriques :

Soient $a\epsilon\mathbb{R}$ *et* A *une partie bornée de* $\mathbb{R}_+\times[a,a+2\pi]\times\mathbb{R}$ *.*

Si f est intégrable sur $\varphi(A)$ *telle que :*

$$\forall(r,\theta,z)\epsilon\mathbb{R}_+\times[a,a+2\pi]\times\mathbb{R}:$$

$$\varphi(r,\theta,z) = \big(\varphi_1(r,\theta,z),\varphi_2(r,\theta,z),\varphi_3(r,\theta,z)\big)$$

Où $\begin{cases}\varphi_1(r,\theta,z) = r\cos\theta = x,\\ \varphi_2(r,\theta,z) = r\sin\theta = y\\ \varphi_3(r,\theta,z) = z\end{cases}$

Alors,

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_A f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,drd\theta dz$$

5.3.3- Changement de variables en coordonnées sphériques :

Les coordonnées sphériques sont définies par l'application :

$\psi:\mathbb{R}_+\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ *avec*
$\psi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}_+\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$*.*

Si f est intégrable sur $\psi(A)$ *alors :*

$$\iiint_{\psi(A)} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_A f(r\, sin\theta\, cos\varphi, r\, sin\theta\, sin\varphi, r\, cos\theta) r^2\, sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Exemple 1:

Calculons le volume d'une boule $B(R)$ *de rayon R.*

$$\mu(B) = \iiint_B r^2\, sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta \right) d\varphi \right) dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exemple 2:

Pour une ellipsoïde ε *d'équation :* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Où $a > 0$, $b > 0$ *et* $c > 0$. *On a :*

$$\mu(\varepsilon) = \iiint_{\varepsilon} dx\, dy\, dz = \iiint_{\psi(B)} dx\, dy\, dz$$

Avec $\psi: B \to \varepsilon$ *une application affine définie par :*

$$\psi(u,v,w) = (au, bv, cw)$$

Et $j_{\psi}(u,v,w) = abc$

D'où :

$$\mu(\varepsilon) = \iiint_B abc\; du\, dv\, dw = \frac{4}{3}\pi abc$$